DAI-Labor
TU Berlin

Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

Problemlösen II:
Informierte Suche und Constrainterfüllung

27.10.2005

Brijnesh J Jain, bjj@dai-labor.de
Stefan Fricke, stefan.fricke@dai-l-abor.de

A|O|T
Agententechnologien in betrieblichen Anwendungen und der Telekommunikation

Gliederung

Einleitung

- **Was haben wir letzte Vorlesung gemacht?**
  - Problemformulierung
    - Aktionen haben identische Kosten
  - **Uninformierte** Suchstrategien für **identische** Kosten
- **Probleme:**
  - Identische Kosten für viele Anwendungen nicht adäquat
    - z.B. Routen planen
  - Suche ohne Vorwissen häufig ineffizient

Worüber handelt diese Vorlesung?

1. **Suchstrategien basierend auf Bewertungsfunktionen f = g + h**
   - g = Kantenbewertungsfunktion / Pfadkosten
   - h = heuristische Funktion (Vorwissen)
2. **Constrainterfüllung**
   - Probleme als eine Menge von Nebenbedingungen formulieren

Gliederung

Bewertungsfunktionen

- **Bewertungsfunktion f misst, wie gut eine Teillösung ist**
- **Suchverfahren basierend auf Bewertungsfunktionen f**
  - **Gegeben:** Liste $(P_1, \ldots, P_k)$ von zu untersuchenden Teilpfaden
  - **Strategie:** Expandiere Teilpfad P* mit minimaler Bewertung

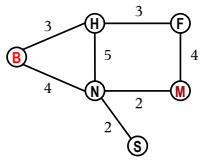
$$P^* = \arg\min_{1 \le i \le k} f(Pi)$$

- **Frage: Wie sieht f aus?**

Bewertungsfunktionen

- **Pfadkosten g**
  - Verschiedene Aktionen haben unterschiedliche Kosten
  - Pfadkosten sind die akkumulierten Kosten der entsprechende Sequenz von Aktionen
- **Beispiel: Straßenentfernung**

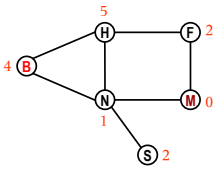
$$g([B, N, S]) = g([B, N]) + g([N, S]) = 4 + 2 = 6$$



B Berlin (Start)
F Frankfurt
H Hannover
M München (Ziel)
N Nürnberg
S Stuttgart

Bewertungsfunktionen

- **Heuristische Funktion h**
  - Schätzung der minimalen Kosten von einem Knoten zum Ziel
- **Beispiel: Luftlinie**
  - $h(B) = 4$
  - $h(N) = 1$
  - $h(S) = 2$



B Berlin (Start)
F Frankfurt
H Hannover
M München (Ziel)
N Nürnberg
S Stuttgart

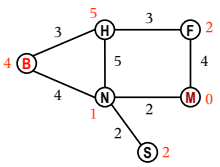
Bewertungsfunktion — Heuristische Funktion

- Das Wort **Heuristik** (abgeleitet vom Griechischen ευρίσκω) **bedeutet ich finde.**
- **Heuristik bezeichnet eine Strategie, die das Streben nach Erkenntnis und das Finden von Wegen zum Ziel planvoll gestaltet [wikipedia].**
- **Heuristiken sind Faustregeln, zur Steuerung der Suche.**

Bewertungsfunktionen

- **Bewertungsfunktion f = g + h**
- **Spezialfälle**
  - $f = g \ (h = 0)$ werte nur Pfadkosten
  - $f = h \ (g = 0)$ werte nur Restkosten
- **Beispiel:**

$$f([B, N, S]) = g([B, N, S]) + h(S) = 6 + 2 = 8$$



B Berlin (Start)
F Frankfurt
H Hannover
M München (Ziel)
N Nürnberg
S Stuttgart

Bewertungsfunktion — Heuristische Funktion

- **Zulässigkeit:**
  - h unterschätzt die tatsächlichen Kosten h*, d.h.

$$0 \le h(X) \le h^*(X)$$

- **Dominanz:**
  - h_1 dominiert h_2 (ist „besser informiert"), wenn h_1, h_2 zulässig und

$$h_1(X) \ge h_2(X)$$

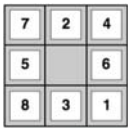
  für alle Knoten X.
- **Folgerungen:**
  - Wenn h zulässig, dann ist $h(Z) = 0$, wobei Z ein Zielknoten ist
  - $h(X) = 0$ für alle Knoten X ist zulässig und maximal uninformiert

Bewertungsfunktion — Heuristische Funktion

Beispiele: 8-Puzzle Problem

- **h(X) = Zahl falsch liegender Ziffern**
  - Zulässig
  - Beispiel: h(X) = 6
- **h(X) = Manhattan Distanz**
  - Zulässig
  - Beispiel: h(X) = 14

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
4	0	3	3	1	0	2	1	**14**



Zustand X

Zielzustand Z

Bewertungsfunktion

Heuristische Funktion

- **Problem: Wie findet man eine heuristische Funktion h?**
  - Intuition, Wissen, Genialität, …
  - Oftmals mehr eine Kunst als eine Wissenschaft
- **Anforderungen an h:**
  - Möglichst genau & zulässig
  - einfach zu berechnen

Gliederung

Suchstrategien

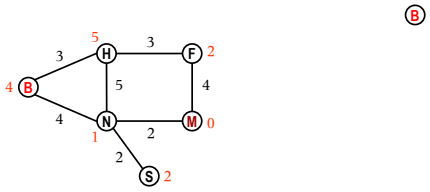
A* Algorithmus

- **Idee:**
  - Expandiere Teilpfad mit minimaler Bewertung f = g + h
  - Verwende Prinzip der dynamischen Programmierung
- **Implementierung:**
  - Sortierte Liste von Teilpfaden
  - Reihenfolge: Aufsteigend bzgl. Bewertung f

Suchstrategien: Simulation

A* Algorithmus

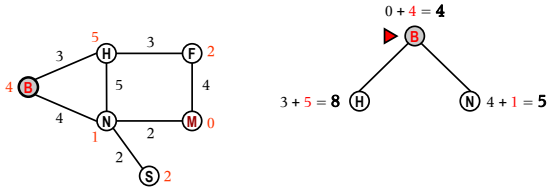
- **Initialzustand**



Suchstrategien: Simulation

A* Algorithmus

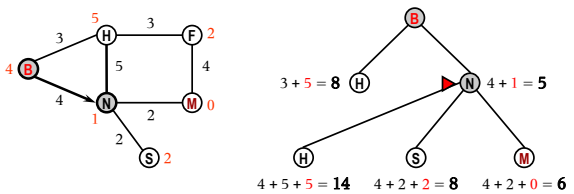
- **Simulation: Expansion 1: Neuberechnung der Knotenwerte**



Suchstrategien: Simulation

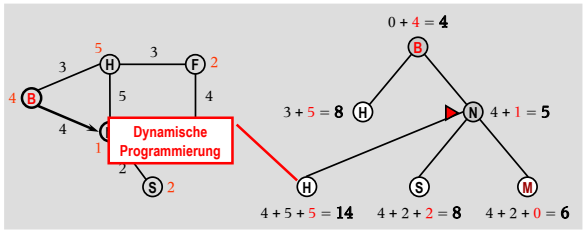
A* Algorithmus

- **Expansion 2 nach Wahl des billigsten Knotens**
- **Neuberechnung der expandierten Knoten** $0 + 4 = 4$



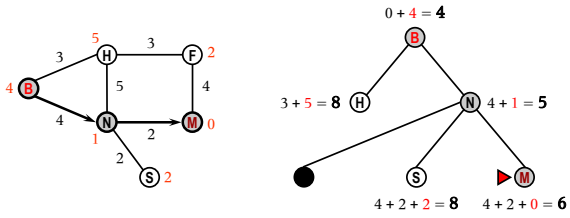
Suchstrategien: Simulation — A* Algorithmus

⇨ Dynamische Programmierung: Entfernen suboptimaler Teilbäume



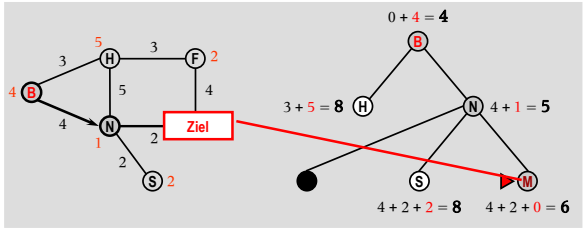
Suchstrategien: Simulation — A* Algorithmus

⇨ Nächster zu expandierender Knoten ist M.



Suchstrategien: Simulation — A* Algorithmus

⇨ Ziel erreicht, Kosten = 6



Suchstrategien — Algorithmus A* [Winston 93]

1. Form a one-element queue consisting of a zero-length path that contains only the root node.
2. Until the first path in the queue terminates at the goal node or the queue is empty
   a) Remove the first path from the queue; create new paths by extending the first path to all neighbors of the terminal node.
   b) Reject all paths with loops.
   c) If two or more paths reach a common node N, delete all those paths except the one that reaches N with the minimum cost. (*Dynamic Programming*)
   d) Add the remaining new paths, if any, to the queue.
   e) Sort the entire queue by ascending order of the evaluation function **f = g + h**
3. If the goal node is found, announce success; otherwise announce failure.

Suchstrategien: Eigenschaften von A*

⇨ **A* ist optimal effizient für jede beliebige Heuristikfunktion h.**
→ Das heißt, kein anderer Algorithmus kann garantieren, dass er mit h weniger Knoten aufspannt als A*.

Unter der Bedingung

$|h(n) - h^*(n)| \leq O(\log h^*(n))$, wobei h das Zulässigkeitskriterium erfüllt

ist die Zeitkomplexität subexponentiell.

Vollständigkeit	**Ja**
Optimalität	**Ja**
Zeitkomplexität	$O(b^m)$
Speicherkomplexität	$O(b^m)$

Suchstrategien — Variationen

⇨ **Best-First Search:** Variation von A* mit
→ f = h
→ ohne dynamische Programmierung

⇨ **Branch and Bound:** Variation von A* mit
→ f = g
→ ohne dynamische Programmierung

⇨ **Bemerkung:**
→ Algorithmen im Anhang

Ausblick

- **Local Search behandelt Suchalgorithmen, für Optimierungsprobleme, bei denen der Lösungspfad unwichtig ist**
  - Z.B. 8-Damen-Problem, Design von Schaltkreisen, Netzwerkoptimierung
- **Wird in der Übung behandelt: Simulated Annealing**

Gliederung

Constraint Satisfaction Problems (CSP)

- **Probleme lösen mittels Suche im Problemraum:**
  - Formuliere das Problem als Graph, finde Zielzustand.
- **Probleme lösen mittels CSP:**
  - Finde *„zufrieden stellende"* Konfiguration.
  - Idee: Formuliere das Problem durch eine Menge von Nebenbedingungen (Constraints) und werte diese aus.

CSP — Beispiel

- **Gegeben:**
  - Variablen x, y mit Wertebereich $\mathbb{R}$
  - Constraints (Nebenbedingungen) C_1, C_2 mit
    - C_1: $2x + y = 10$
    - C_2: $x + y = 7$
- **Ziel:**
  - Finde Belegung $\{x = a, y = b\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, sodass beide Constraints C_1, C_2 erfüllt sind.

CSP — Formalisierung

- **Constraintnetz**
  - Variablen x_i mit Werten aus Wertebereichen D_i $(1 \le i \le n)$
  - Constraints $C_1, \ldots C_m$
- **Constraint (Neben- / Randbedingung)**
  - Ein k-stelliges Constraint C beschreibt eine Relation

$$R_C \subseteq D_{i1} \times \ldots \times D_{ik}$$

- **Constraint Satisfaction Problem (CSP)**
  - Finde Belegung

$$\{x_1 = v_1, \ldots, x_n = v_n\},$$

sodass $v_i \in D_i$ und alle Constraints $C_1, \ldots C_m$ erfüllt sind.

CSP — Formalisierung

- **Belegung**
  - Belegung einer Teilmenge von Variablen x_i mit Werten aus D_i
- **Konsistente Belegung**
  - Belegung, die keine Constraints verletzt
- **Vollständige Belegung**
  - Belegung aller Variablen x_i mit Werten aus D_i
- **Lösung des CSP**
  - Vollständige und konsistente Belegung

CSP

- **Problem:**
  - Wie können wir CSPs lösen?
- **Idee:**
  - Umformulierung von CSP als Suchproblem
  - Jeder Algorithmus, der ein Suchproblem löst, löst auch ein CSP
- **Frage:**
  - Wie können wir CSP als Suchproblem formulieren?

CSP als inkrementelles Suchproblem

- **Problemraum**
  - Menge aller Belegungen
- **Anfangszustand**
  - Leere Belegung {}
- **Zielzustände**
  - Vollständig konsistente Belegungen
- **Aktionen (inkrementelle Formulierung)**
  - Belege eine freie Variable, sodass Konsistenz erhalten bleibt

CSP Beispiel: Färbeproblem

Färbe die Regionen einer Karte mit 3 Farben so ein, dass keine zwei benachbarten Regionen dieselbe Farbe haben.

- **Variablen:**
  - WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- **Wertebereich:**
  - {rot, grün, blau}
- **Constraints:**
  - Benachbarte Regionen haben unterschiedliche Farbe

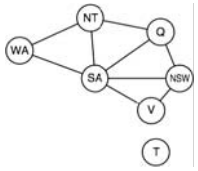
CSP: Lösung des Färbeproblems

- **Vollständige konsistente Belegung**

{
WA = rot,
NT = grün,
Q = rot,
NSW = grün,
V = rot,
SA = blau,
T = grün
}

CSP Repräsentation des Constraintgraphen

- **Visualisierung des CSP**
  - Knoten repräsentieren Variablen
  - Kanten repräsentieren Constraints
- **Beispiel: Färbeproblem**
  - Binäres CSP (2-stellige Constraints)
- **Bemerkung:**
  - Bei k-stelligen Constraints ist Constraintgraph ein Hypergraph.



CSP

- **Problem:**
  - Finde Lösung, d.h. vollständig konsistente Belegung
- **Ansatz:**
  - Tiefensuche (Backtracking)
- **Warum keine Breitensuche?**
  - Jede Lösung hat Pfadlänge n (n = Anzahl der Variablen)
  - Breitensuche exploriert den gesamten Suchraum

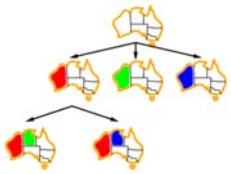
CSP Backtracking-Algorithmus (Tiefensuche)

1. Form a 1-element stack consisting of an empty assignment of the variables.
2. Until the first assignment in the stack is complete and consistent or the stack is empty
   a) Remove the first assignment from the stack; create new assignments by assigning a value to a single unassigned variable in all possible ways.
   b) Reject all inconsistent assignments.
   c) Push the new assignments, if any, to the top of the stack.
3. If a complete and consistent assignment is found, announce success; otherwise announce failure.

CSP Tiefensuche

Schritt 0

CSP Tiefensuche

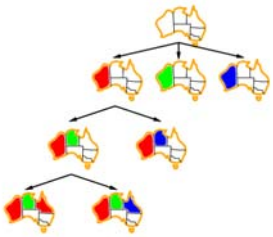


Schritt 0

Schritt 1

Schritt 2

CSP Tiefensuche



Schritt 0

Schritt 1

Schritt 2

Schritt 3

CSP Leistungsmessung der Tiefensuche

- d = Wertebereichsgröße
- n = Anzahl der Variablen

☺	Vollständigkeit	Ja	Für endliche diskrete Wertebereiche
☺	Optimalität	Ja	Trivial, denn jede Lösung ist optimal
😐	Zeitkomplexität	$O(d^n)$	
☺	Speicherkomplexität	$O(n^2 d^2)$	Für binäre Constraints

CSP: Diskussion der Tiefensuche

⇨ **Tiefensuche ist für reale Probleme zu ineffizient**

⇨ **Frage:**
- Können wir Tiefensuche verbessern?

⇨ **Antwort:**
- Ja, sogar ohne domänenspezifisches Wissen (heuristische Funktion)
- General-purpose methods

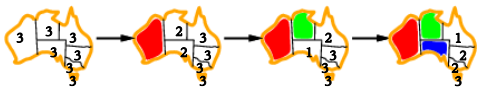
CSP: General-Purpose Methods basierend auf Backtracking

Wichtige Entwurfsentscheidungen für bessere Effizienz:

1. **Welche Variable soll als nächste mit einem Wert belegt werden?**
   - → **Verfahren: Minimum Remaining Values Heuristik**
2. **In welcher Reihenfolge sollen die Werte zugeordnet werden?**
   - → **Verfahren: Least Constraining Value Heuristik**
3. **Können Misserfolge rechtzeitig erkannt werden?**
   - → **Verfahren: Forward Checking und Constraint Propagation**

CSP: Minimum Remaining Values (MRV) Heuristik

- ⇨ **Auswahl der nächsten zu belegenden Variable**
- ⇨ **Früherkennung von Belegungen, die zu Inkonsistenz führen**
- ⇨ **Idee: Belege Variable mit minimaler Anzahl von „*plausiblen*“ Werten**

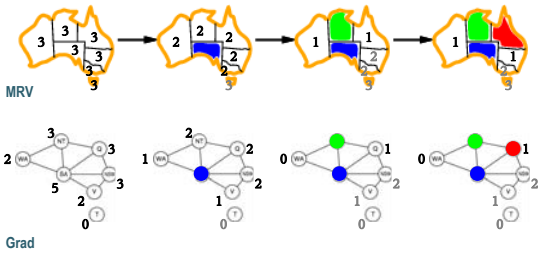


CSP: Tie-Breaker (Entscheidungshilfe) für MRV-Variablen

- ⇨ **Problem:**
  - → MRV-Variable ist i.A. nicht eindeutig bestimmt.
  - → Welche MRV-Variable soll als nächstes belegt werden?
- ⇨ **Lösung: Grad-Heuristik als Tie-Breaker**
  - → Wähle diejenige MRV Variable mit den meisten Constraints zu freien (d.h. noch nicht belegten) Variablen.

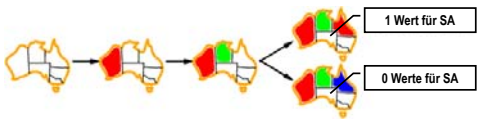
CSP: Tie-Breaker (Entscheidungshilfe) für MRV-Variablen

Vernetzungsgrad der Constraintvariablen als Entscheidungshilfe



CSP: Least Constraining Values (LCV) Heuristik

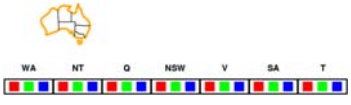
- ⇨ **Problem: Auswahl des nächsten Werts, um freie Variable zu belegen**
- ⇨ **Idee: Wähle denjenigen Wert, der die wenigsten Werte für benachbarte freie Variablen eliminiert.**



CSP: Forward Checking

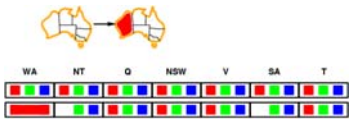
- ⇨ **Protokolliere alle „plausiblen“ Werte für freie Variablen.**
- ⇨ **Terminiere, wenn es eine Variable ohne „plausible“ Werte gibt.**

Initialisierung: Alle Variablen besitzen ihre initialen Wertebereiche.



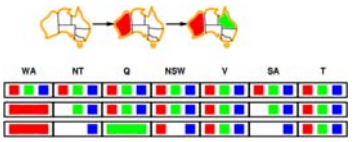
CSP: Forward Checking

⇨ Durch Instantiierung der Variable WA mit rot wird dieser Wert aus den benachbarten Variablen NT und SA entfernt.



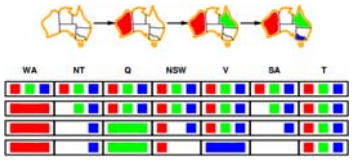
CSP: Forward Checking

⇨ Belegung von Q mit grün führt zu Wertebereichseinschränkungen für NT, NSW und SA



CSP: Forward Checking

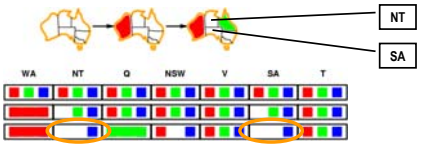
⇨ Belegung von V mit Blau führt zum Konflikt: SA hat einen leeren Wertebereich



CSP: Problem des Forward Checking

⇨ FC propagiert Informationen von belegten zu unbelegten Variablen

⇨ Entdeckt frühzeitig einige aber nicht alle Inkonsistenzen

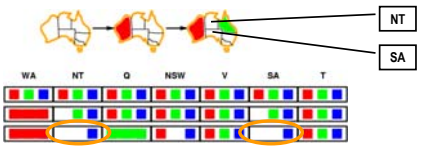


⇨ NT und SA können nicht beide mit blau belegt werden

CSP: Constraint Propagation

⇨ Constraint Propagation propagiert alle Implikationen durch das gesamte Constraintnetz.

→ Der Propagierungsprozess endet, sobald das Netz im Ruhezustand ist



⇨ Auch das Constraint zwischen NT und SA wird ausgewertet.

CSP: Constraint Propagation und Arc Consistency

⇨ Für jede Kante (arc) im Constraintgraph zwischen Variablen a und b ist durch Constraint Propagation sichergestellt, dass für jeden Wert von a mindestens ein konsistenter Wert für b existiert (und vice versa).

⇨ Arc Consistency am Beispiel a + b = c (3-Konsistenz):

Vorher:	Propagierung:	Nachher:
a: {1,3,4,5,6}	a: {1,3,4,6}	a: {1,3,6}
b: {1,3,7,9,19}	b: {1,3,7,9,19}	b: {3,7,19}
c: {8,9,22,50}	c: {8,9,22,50}	c: {8,9,22}

CSP — Anwendungen

- Assignment und Scheduling Probleme
- Konfiguration und Layout
- Bemerkung:
  - Die meisten Anwendungen haben kontinuierliche Variablen

Zusammenfassung Informed Search

- Informed Search ist Suche unter Verwendung von Heuristiken.
  - Pfadkosten und geschätzte Kosten zum Ziel.
- A* ist optimal effizient.
- Das Finden guter Heuristiken ist oft schwierig.

Zusammenfassung Constraint Satisfaction Problems

- Beschreibung des Problems als eine Menge von Nebenbedingungen
- CSP als Suche mittels Backtracking durchführbar
- Variablenauswahl und Werteauswahl zur Effizienzsteigerung nutzen
- Forward Checking propagiert Wertebereichseinschränkungen an benachbarte Variablen
- Constraint Propagation propagiert Wertebereichseinschränkungen durch das gesamte Constraintnetz

Ausblick

- Diese Vorlesung:
  - Informierte Suchverfahren mit gewichteten Kanten und unter Einsatz von Heuristiken
  - Constraint Satisfaction Problems als Suche mittels Backtracking
  - CSPs zur Suchraumbegrenzung durch Propagierung von Wertebereichseinschränkungen
- Nächste Vorlesung:
  - Planen

DAI-Labor
TU Berlin

Informierte Suchverfahren

nächster Termin: 03.10.2005

Planen

Brijnesh J Jain, bjj@dai-labor.de
Stefan Fricke stefan.fricke@dai-l-abor.de

AIOIT
Agententechnologien in betrieblichen Anwendungen und der Telekommunikation

Referenzen

1. S.J. Russell, P. Norvig: *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education, Inc., 2003.
2. P.H. Winston: *Artificial Intelligence*. Addison-Wesley, 1993.

Anhang

- ⇨ **Algorithmen**
  - → A*
  - → Best First Search
  - → Branch and Bound

Suchstrategien — A* Algorithmus

Algorithmus A* [Winston 93]

1. Form a one-element queue consisting of a zero-length path that contains only the root node.
2. Until the first path in the queue terminates at the goal node or the queue is empty
   a) Remove the first path from the queue; create new paths by extending the first path to all neighbors of the terminal node.
   b) Reject all paths with loops.
   c) If two or more paths reach a common node N, delete all those paths except the one that reaches N with the minimum cost. (*Dynamic Programming*)
   d) Add the remaining new paths, if any, to the queue.
   e) Sort the entire queue by ascending order of the evaluation function **f = g + h**
3. If the goal node is found, announce success; otherwise announce failure.

Algorithmus Best First Search [Winston 93]

1. Form a one-element queue consisting of a zero-length path that contains only the root node.
2. Until the first path in the queue terminates at the goal node or the queue is empty
   a) Remove the first path from the queue; create new paths by extending the first path to all neighbors of the terminal node.
   b) Reject all paths with loops.
   c) Add the remaining new paths, if any, to the queue.
   d) Sort the entire queue by ascending order of the evaluation function **f = h**
3. If the goal node is found, announce success; otherwise announce failure.

Algorithmus Branch and Bound [Winston 93]

1. Form a one-element queue consisting of a zero-length path that contains only the root node.
2. Until the first path in the queue terminates at the goal node or the queue is empty
   a) Remove the first path from the queue; create new paths by extending the first path to all neighbors of the terminal node.
   b) Reject all paths with loops.
   c) Add the remaining new paths, if any, to the queue.
   d) Sort the entire queue by ascending order of the evaluation function **f = g**